Indução Matemática Fraca

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

24 de novembro de 2016

Indução Matemática

- **Objetivo:**

➡ Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

Indução Matemática

- **Objetivo:**

➡ Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

- **Importância:**

➡ É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Indução Matemática

- **Objetivo:**

➡ Aprender uma técnica para provar resultados matemáticos.

- **Importância:**

➡ É uma técnica poderosa e muito útil usada para provar resultados que envolvem os números naturais.

Exemplo: Provar que 1+2+3+ ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in N$.

Idéia Intuitiva

Idéia Intuitiva

- Exemplo 1:

- Consideremos uma sequência de dominós alinhados tal que:

  Se um cair ele vai derrubar o seguinte

Idéia Intuitiva

- Exemplo 1:

- Consideremos uma sequência de dominós alinhados tal que:

  Se um cair ele vai derrubar o seguinte

Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

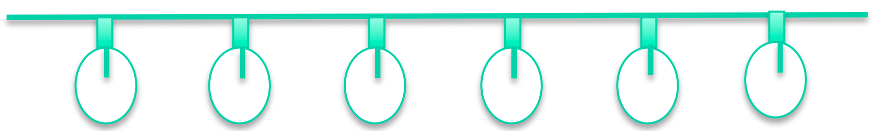
  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

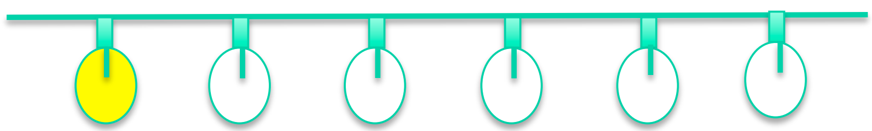


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

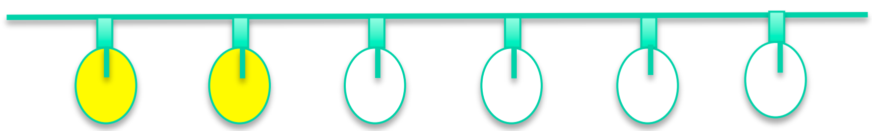


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

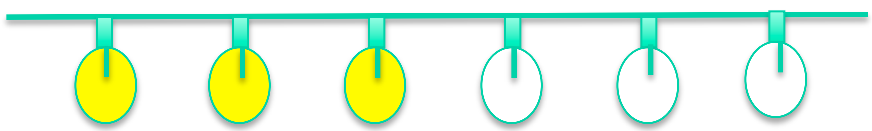


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

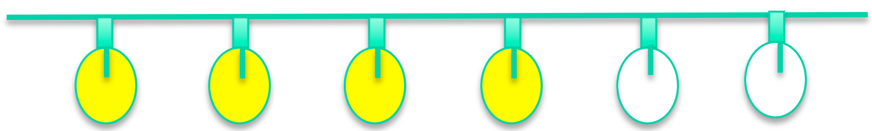


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

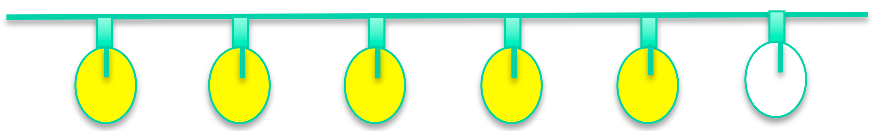


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte

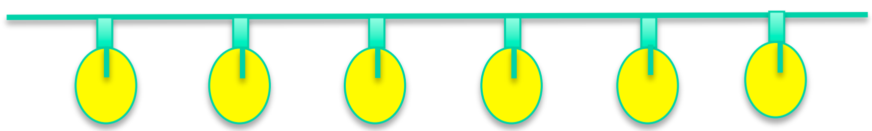


Idéia Intuitiva

- Exemplo 2:

- Consideremos lâmpadas elétricas alinhadas e conectadas tal que:

  Ao acender uma delas acende-se a seguinte



Princípio da Indução Matemática (PIM)

Formalização:

- Seja P(n) uma afirmação, para cada n natural

Se: (i) P(1) é verdadeira e

(ii) P(k) é verdadeira então P(k+1) é verdadeira, para todo k natural.

Então P(n) é verdadeira, para todo n natural

Formalização do Princípio da Indução Matemática

- Na **Demonstração por Indução**, queremos demonstrar a validade de P(n), uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
- Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

  (1) Base da Indução: Demonstramos P(1)

  (2) Hipótese de Indução: Assumimos que P(k) é verdadeiro, para $k \geq 1$.

  (3) Passo de Indução: Mostrar que P(k+1) é verdadeiro, a partir da hipótese de indução (2).

Exemplo 1: Prove, por indução, $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$

Exemplo 2: Prove, por indução, $\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

Exemplo 3: Mostre que 8 divide $3^{2n} - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Princípio da Indução Matemática (PIM) Generalizado

Princípio da Indução Matemática (PIM) Generalizado

- Lembremos a formulação da PIM

Se: (i) P(1) é verdadeira e

(ii) P(k) é verdadeira então P(k+1) é verdadeira, para todo k natural.

Então P(n) é verdadeira, para todo n natural

Princípio da Indução Matemática (PIM) Generalizado

- Para aplicarmos o PIM generalizado precisamos executar os três passos a seguir:

(1) Base da Indução:

Mostrar que P(n) é verdadeira, para $n=n_0$.

(2) Hipótese de indução:

Assumir que P(k) é verdadeira, para $k \geq n_0$.

(3) Passo indutivo:

Mostrar que P(k+1) é verdadeira, assumindo a hipótese de indução (2).

Exemplo 4: Mostre que $n^2 > 3n$, $\forall n \geq 4$, $n \in N$

- Verifique que:

$P(n)$: $n^2 > 3n$, não é verdadeira para n=1, 2, 3

$$\left.\begin{aligned} &P(1): 1^2 > 3.\ 1 = 3\ ? \\ &P(2): 2^2 > 3.\ 2 = 6\ ? \\ &P(3): 3^2 > 3.\ 3 = 9\ ? \end{aligned}\right\}$$

Não são verdadeiras

Exercícios

Prove usando indução matemática

(i) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(1+3n)}{2}$

(iv) $(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$

(v) 2 divide $n^2 + n$